**Penarikan Sampel dan Pendugaan Interval**

Populasi adalah kumpulan seluruh elemen yan diteliti.

Sampel adalah bagian dari populasi.

Sampel dapat digunakan untuk memperoleh informasi yang berhubungan dengan suatu populasi.

Informasi populasi yang berasal dari sampel disebut parameter.

Penarikan sampel acak sederhana (simple random sampling):

1. Populasi terbatas (finite population)
2. Populasi tak terbatas (infinite population)

Penarikan sampel acak sederhana populasi terbatas, sebuah sampel acak sederhana berukuran “n” dari populasi terbatas berukuran N adalah sampel yang dipilih sedemkian rupa sehingga setia kemungkinansampel berukuran “n” memiliki peluang yang sama untuk terpilih.

Penarikan sampel acak sederhana populasi tak terbatas, adalah sampel yang dipilih sedemikian rupa sehingga kondisi berikut terpenuhi, yaitu;

1. Setiap elemen yang dipilih berasal dari populasi yang sama.
2. Setiap elemen dipilih secara independen

**Dalil Batas Memusat**
Dalam pemilihan sampel acak sederhana dengan ukuran n dari suatu populasi yang berasal dari distribusi apapun, maka distribusi dari rata-rata sampel dapat didekati dengan distribusi probabilitas normal untuk ukuran sampel yang besar.

**Statistik Induktif** : Pengambilan kesimpulan mengenai nilai sebenarnya dari parameter (yang dihitung berdasarkan populasi), yang didasarkan atas perhitungan sampel , sehingga kesimpulan tersebut mengandung unsur ketidakpastian. Artinya kesimpulan tersebut bisa benar bisa juga salah, karena data yang digunakan adalah data pendugaan atau taksiran yang mengandung kesalahan dalam penarikan sampel.

**PENDUGAAN PARAMETER**
Pendugaan adalah proses yang menggunakan sampel statistik untuk menduga atau menaksir hubungan parameter populasi yang tidak diketahui. Pendugaan merupakan suatu pernyataan mengenai parameter populasi yang diketahui berdasarkan informasi dari sampel, dalam hal ini sampel random, yang diambil dari populasi bersangkutan.

Penduga adalah suatu statistik ( harga sampel) yang digunakan untuk menduga suatu parameter.
Dengan penduga, dapat diketahui seberapa jauh suatu parameter yang tidak diketahui berada di sekitar sampel. Lambang penduga adalah theta topi (θ)

 Sifat-sifat Penduga

1. θ merupakan penduga tak bias dari θ jika E (θ) = 0. Sebuah penduga dikatakan tak bias kalau rata-rata dari seluruh kemungkinan sampel akan sama dengan nilai parameter dari populasi yang diduga.
2. θ merupakan penduga konsisten apabila nilai θ cenderung mendekati nilai parameter θ untuk n yang semakin besar mendekati tak terhingga. Jadi ukuran sampel yang besar cenderung memberikan penduga titik yang lebih baik dibandingkan ukuran sampel kecil.
3. θ merupakan penduga yang efisien jika penduga θ memiliki varians atau standar deviasi yang lebih kecil dibandingkan dengan penduga lainnya. θ merupakan penduga yang cukup jika penduga θ mencakup seluruh informasi tentang θ yang terkandung di dalam sampel

Dalam statistik inferensia, θ, yang digunakan untuk menuduga parameter θ dari populasi.

Penduga : Ⴟ; p; s ; r ; b

Parameter : µ ; p ; σ ; ρ ; ϐ

Statistik Induktif meliputi 2 hal :
**\*** Teori Pendugaan, : - **Pendugaan Tunggal.** ialah pendugaan yang terdiri dari saru nilai saja. Penduga tunggal merupakan fungsi dari nilai observasi yang berasal dari sampel dengan n elemen

 - **Pendugaan Interval.** adalah suatu pendugaan berupa interval yang dibatasi oleh dua nilai, yang disebut nilai batas bawah dan nilai batas atas. Interval pada pendugaan disebut interval keyakinan atau selang keyakinan

 \* Pengujian hipotesis

**Pendugaan Titik/tunggal**

Pendugaan tunggal atau titik ( point estimate) ialah pendugaan yang terdiri dari satu nilai saja.

Memberikan nilai yang kemungkinan besar berbeda dari nilai parameter yang sebenarnya.

Pendugaan tunggal yang terdiri dari satu angka tidak memberikan gambaran mengenai berapa jarak/selisih nilai penduga tersebut terhadap nilai sebenarnya.

**Contoh**: Jika ingin mengetahui jumlah orderan yang diterima oleh jasa angkutan daring perhari dilakukan survey secara acak terhadap 500 orang, diperoleh data rata-rata (Ⴟ) orderan sebanyak 30 kali/hari. Nilai ini digunakan untuk menduga rata-rata orderan, karena hanya satu nilai saja sebagai penaksir, makaႿ disebut **penaksir titik**.

**Pendugaan interval**

 Jika menginginkan suatu pengukuran yang obyektif tentang derajat kepercayaan kita terhadap ketelitian pendugaan, maka kita sebaiknya menggunakan pendugaan interval (interval
estimation). Pendugaan ini akan memberikan nilai-nilai statistik dalam suatu interval dan bukan nilai tunggal sebagai penduga parameter.

 Pendugaan interval ( selang) : pendugaan berupa interval, dibatasi dua nilai ( batas bawah dan batas atas) Pendugaan interval : interval kepercayaan atau interval keyakinan ( confidence interval ) yang dibatasi oleh batas keyakinan atas (upper confidence limit) dan batas keyakinan bawah (lower confidence limit) .

 Untuk membuat pendugaan interval ditentukan terlebih dahulu koefisien keyakinan atau tingkat keyakinan yang diberi simbol 1 - α

Koefisien Keyakinan atau Tingkat Keyakinan

Misalnya : 1 - α = 0,90
α = 0,10 = 10 %.
α/2 = 0,05
jadi Zα/2 = Z 0,05 = (Z|P = 0,5 - α/2) = Z 0,5 – 0,05 = Z0,45 = 1,645
**(lihat Tabel Normal).**

Misalnya : 1- α = 0,98 dan n = 25
α = 0,02
jadi tα/2 ; v = tα/2 ; n – 1 = t 0,01 ; 25 –1 = t 0,01 ; 24 = 2,492
**( lihat tabel Distribusi t).**

**Pendugaan interval rata-rata (µ)**

Yang akan ditentukan adalah selang taksiran taksiran dari nilai µ.

Parameter ditaksir oleh harga diantara batas-batas dua harga
Contoh:
jika rata-rata sampel tinggi tanaman adalah 60 cm, maka rata-rata populasi bisa antara 55 cm – 65 cm atau antara 50 cm – 70 cm.
- Semakin besar interval duga maka semakin kecil selang kepercayaan
- Semakin kecil interval duga maka semakin besar selang kepercayaan.
“sedapat mungkin kita memperoleh interval duga yang kecil dengan selang kepercayaan yang besar.”

Sampel diambil daripopulasi normal, atau jika tidak mempunyai ukuran sampel yang besar, selang kepercayaan untuk µ dapat dibuat dengan distribusi sampel Ⴟ.

Sesuai teorema limit pusat, diharapkan distribusi sampel Ⴟ akan mendekati normal dengan rata-rata µ Ⴟ = µ, dan simpangan baku σႿ = σ/√n.

Untuk menghitung pendugaan interval, terlebih dahulu tentukan besarnya koefisien keyakinan/tingkat keyakinan dengan symbol  **1 – α.** Besarnya nilai **1 – α**, misalnya 0,90 (α = 10%), 0,95 (α = 5%)

1. - **α**

**α/2 α/2**

* **Z α/2 0 Z α/2**

 P (-**Z α/2 < Z < Z α/2**) = 1 -  **α**

Dimana Z = (X - µ)/( (X - µ)S/√n)

Sehingga P (-**Z α/2 <**$\frac{X-µ}{S/√n}$**< Z α/2**) = 1 -  **α atau P (Ⴟ - Z α/2** $\frac{σ}{√n} $**< µ < Ⴟ + Z α/2** $\frac{σ}{√n}$**) = 1 - α**

 batas bawah batas atas

Pendugaan interval, digunakan untuk menduga;

1. Pendugaan Rata-Rata, dari sampel kecil atau sampel besar

2. Pendugaan Beda (selisih) 2 Rata-Rata, dari sampel kecil atau sampel besar

3. Pendugaan Proporsi dari Sampel besar, dari sampel kecil atau sampel besar

4. Pendugaan Beda (selisih) 2 Proporsi, dari sampel kecil atau sampel besar

**1. a. Pendugaan interval µ, jika σ diketahui**

Selang kepercayaan bagi μ; σdiketahui. Bila Ⴟadalah nilai tengah contoh acak berukuran n dari suatu populasi dengan ragam diketahui. Maka selang kepercayaan (1-α )100% bagi μ adalah

 **Ⴟ - Z α/2** $\frac{σ}{√n} $**< µ < Ⴟ + Z α/2** $\frac{σ}{√n}$- n berukuran besar (≥ 30)
- Jika σ2 tidak diketahui, tetapi sampel berukuran besar (n≥30), σ2 dapat diganti dengan s2

**Contoh:** Rata-rata nilai IPK 36 mahasiswa tingkat akhir adalah 3,6 dengan simpangan baku populasinya sebesar 0,3. Hitunglah selang kepercayaan 95% dan 99% untuk rata-rata seluruh mahasiswa tersebut.

 Nilai duga μ adalah Ⴟ = 3,6
 Nilai dapat diduga dengan s = 0,3 (n ≥ 30)
 Selang kepercayaan 95% (α = 5% = 0,05), Z α/2= 0,025
 Nilai z sebelah kanan dan kiri = Z 0,025 (α/2) = 1,96

**Ⴟ - Z α/2** $\frac{σ}{√n} $**< µ < Ⴟ + Z α/2** $\frac{σ}{√n}$ , dengan selang kepercayaan 95%, maka interval rata-rata

 3,6 – (1,96. 0,3/√36) < µ < 3,6 + (1,96. 0,3/√36)

 3,5 < µ < 3,7

Selang kepercayaan 99% (α = 1% = 0,01), Z α/2= 0,005

Nilai Z sebelah kanan dan kiri = Z0,005(α/2) = 2,575

Jadi nilai interval rata-rata dengan selang kepercayaan 99% adalah

 3,6 – (2,575. 0,3/√36) < µ < 3,6 + (2,575. 0,3/√36)

 3,47 < µ < 3,73

**1.b. Pendugaan interval µ, jika σ tidak diketahui**

Selang kepercayaan bagi μ; tidak diketahui. Bila Ⴟ dan s adalah nilai tengah dan simpangan baku
contoh berukuran n < 30 dan ragam tidak diketahui, maka selang kepercayaan (1-α )100%
bagi μ adalah

**Ⴟ - t α/2(n-1)** $\frac{s}{√n} $**< µ < Ⴟ + t α/2(n-1)** $\frac{s}{√n}$

n – 1 disebut derajat bebas (df=degree of freedom)

**Contoh;** Terdapat tujuh botol berisi air mineral sebesar 9,8; 10,2; 10,4; 9,8; 10; 10,2 dan 9,6 liter. Tentukan selang kepercayaan 95% bagi nilai tengah isi semua botol. Asumsikan data menyebar normal.

n = 7; Ⴟ =10

S = $\frac{∑ √(Xi - Ⴟ)2}{n-1}$= 0,283

Selang kepercayaan 95%, α = 5% = 0,05; df= 7 – 1 = 6;

t α/2(n-1) =  t0,025;6 = 2,4469

Jadi nilai interval rata-rata dengan selang kepercayaan 99% adalah

 10 – (2,4469. 0,283/√7) < µ < 10 + (2,4469. 0,283/√7

 9,74 < µ < 10,26

**2.a. Pendugaan interval selisih µ ;(µ1 - µ2 ), jika σ tidak diketahui**

Bila kita mempunyai dua populasi saling bebas dengan mean μ1 dan μ2 serta ragam σ12 dan σ22 maka penduga titik bagi selisih antara μ1 dan μ2 adalah .Bila Ⴟ1dan Ⴟ2adalah nilai tengah sampel acak bebas berukuran n1 dan n2 yang diambil dari populasi dengan ragam σ12 dan σ22 diketahui, maka selang kepercayaan 100(1-α)% bagi μ1-μ2adalah

 

Jika σ12 dan σ22 tidak diketahui, tetapi n1 dan n2 lebih kecildari 30, maka σ12 dan σ22 dapat diganti dengan s12 dan s22

**Contoh:** Dua buah mesin A dan B dibandingkan dlm konsumsi BBMnya. Random sampling mesin A sejumlah 50 dan B sejumlah 75 dipakai. Ternyata rata-rata konsumsi BBM mesin A adalah 36 mil/galon dan mesin B 42 mil/galon. Carilah interval kepercayaan 96% bagi μB- μA bilamana diketahui standard deviasi populasi bagi A= 6 mil/galon dan B = 8 mil/galon

XsA=36, XsB = 42; nA=50 dan nB =75. σA=6 dan σB=8 interval kepercayaan 96 % , 1 – α = 4% 0.004, Z α/2 = Z0,02 = 2,05

Jadi nilai interval selisih rata-rata dengan selang kepercayaan 96% adalah

(42 – 36) - 2,05√(36/50 + 64/75) < **(µ1 - µ2 )** <(42 – 36) + 2,05√(36/50 + 64/75)

 **3,43 < (µ1 - µ2 ) < 8,57**

**Contoh;** Suatu sampel random sebanyak 12 buah, dari jenis produk yang dihasilkan oleh suatu perusahaan mempunyai berat rata-rata 3.11 gr dengan standar deviasi 0.771 gr. Sedangkan sampel yang lain dari jenis produk yang dihasilkan perusahaan lainnya berjumlah 15 buah dengan berat rata-rata 2.04 grdan standar deviasi 0.448. Distribusi berat produk diasumsikan berdistribusi normal, estimasilah perbedaan rata-rata tersebut dengan tingkat kepercayaan 90 persen

x-bar1 = 3.11 adl rata-rata 1, n1 = 12, S1 = 0.771.

x-bar2 = 2.04 adl rata-rata 2, n2 = 10, S2 = 0.448

Diasumsikan varians sama, maka



α = 0.1 → t0.05db=12+10-2 = t0.05db=20 = 1.725

Jadi, selang kepercayaan 90% untuk selisih rata-rata antara dua produk adalah

**Penduga Interval bagi p (p = proporsi populasi)**

Penduga Interval atau Selang Kepercayaan dua arah 100(1-ά)% bagi Proporsi adalah

 **ṕ - Z α/2.√** $\frac{p(1-p)}{n}$ **< p < ṕ + Z α/2.√**$ \frac{p(1-p)}{n}$

**proporsi = ṕ =** $\frac{x}{n}$

**Contoh:** Sebuah produsen makanan ingin mengetahui berapa persen para langganannya yang puas terhadap produknya. Untuk itu dilakukan penelitian terhadap 4.000 konsumen yang dipilih secara acak, ternyata ada 800 kosumen ayng tidak puas terhadap produknya. Dengan tingkat keyakinan 90% dan 95% buatlah pendugaan interval persentase konsumen yang tidak puas dengan barang yang dihasilkan produsen tersebut.

Penyelesaian

**α = 90 % , Z α/2  = Z 0,05 = 1,645, p = 800/4.000 = 0,2**

**0,2 - 1,645.√** $\frac{0,2(1-0,8)}{4.000}$ **< p < 0,2 + 1,645.√** $\frac{0,2(1-0,8)}{4.000}$

**0,2 – 0,0104 < p < 0,2 + 0,0104**

**0,1896 < p < 0,2104**

**18,96% < p < 21,04%**

**α = 95 % , Z α/2  = Z 0,025 = 1,96, p = 800/4.000 = 0,2**

**0,2 - 1,96.√** $\frac{0,2(1-0,8)}{4.000}$ **< p < 0,2 + 1,96.√** $\frac{0,2(1-0,8)}{4.000}$

**0,2 – 0,0124 < p < 0,2 + 0,0124**

**0,1876 < p < 0,2124**

**18,76% < p < 21,24%**

**Pendugaan interval selisih dua proporsi (p1 – p2)**

 **(ṕ1 - ṕ2) - Z α/2.S(ṕ1 - ṕ2)  < (p1 – p2) < (ṕ1 - ṕ2) + Z α/2.S(ṕ1 - ṕ2)**

 

**Contoh :** BKKBN melakukan penelitian di dua daerah (D1 dan D2) untuk mengetahui apakah ada perbedaan antara persentase penduduk yang setuju KB di daerah tersebut. Kemudian akan dibuat pendugaan interval mengenai besarnya selisih/perbedaan persentase tersebut. Di daerah D1 dan D2 masing-masing dilakukan wawancara terhadap 120 orang, antara lain menanyakan apakah mereka setuju KB atau tidak. Dari D1 ada 90 orang dan dari D2 ada 78 orang yang setuju KB. Buatlah pendugaan interval dari perbedaan persentase tentang pendapat penduduk yang setuju dengan KB, di kedua daerah tersebut,dengan tingkat keyakinan sebesar 90%

Penyelesaian:

**ṕ1 =** $\frac{X1}{n1}$ **= 90/120 = 0,75**

**ṕ2 =** $\frac{X2}{n2}$ **= 78/120 =0,65 ; (ṕ1 - ṕ2) = 0,75 – 0,65 = 0,1**

**α = 90 % , Z α/2  = Z 0,05 = 1,645,**



 = $√$ $\frac{0,75(0,25)}{120}$ + $\frac{0,65(0,35)}{90}$

 = 0,059

**(0,1) – 1,645.(0,059)  < (p1 – p2) < (0,1) + 1,645.(0,059)**

 **0,0029 < (p1 – p2) < 0,1971**

 **0,29% < (p1 – p2) < 19,71%**